

Integrasjon - Oppgaver med løsningsforslag

Løsningsforslag nederst

1. Beregn de ubestemte integralene

a) $\int x^2 - 5x + e^x \, dx$

b) $\int x \cos x \, dx$

c) $\int \frac{x}{x^2 - 9} \, dx$

d) $\int \frac{e^x}{e^x + 5} \, dx$

e) $\int \sin^3(x) \cdot \cos(x) \, dx$

2. La f være funksjonen gitt ved $f(x) = 6x^2 + 4x - 3$.

Finn den antideriverte G til f som er slik at $G(1) = 0$.

3. Beregn de bestemte integralene

a) $\int_{-1}^0 -x^3 + 3x \, dx$

b) $\int_0^1 (2x + 1)e^{x^2+x} \, dx$

c) $\int_0^{\ln 2} e^{2x} \, dx$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(\sin x + 2)^2} \, dx$

e) $\int_0^1 \sqrt{x^2 + 4x + 4} \, dx$

4. Finn arealet begrenset av grafene til de to funksjonene $f(x) = x^2$ og $g(x) = x + 2$.

5. Utled uttrykket for delvis integrasjon ved å ta utgangspunkt i produktregelen for derivasjon.

6. La $f(x) = \tan x$.

a) Vis at $f'(x) = 1 + \tan^2 x$.

b) Regn ut $\int \frac{1 + \tan^2 x}{\tan x} \, dx$.

7. Beregn integralene uten å finne en antiderivert

a) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, dx$

b) $\int_0^5 x \, dx$

c) $\int_e^{\pi} dx$

8. Regn ut arealet av flaten avgrenset av grafene til f og g når $f(x) = -x^2 + 8x - 7$ og $g(x) = x^2 - 1$.

9. Funksjonen f er gitt ved $f(x) = \cos(2x)$ for $D_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. La S være flaten avgrenset av grafen til f og linja $y = \frac{1}{2}$.

a) Skissér S .

b) Beregn arealet av S .

c) Ved å rotere S om x -aksen får man et omdreiningslegeme. Hva er volumet av dette omdreiningslegemet?

Ekstra: Numerisk integrasjon

Summen $\mathcal{R}_n$ definert i teori-delen under tittelen "bestemt integrasjon og summasjon" kalles *venstre Riemann-sum*. Her kan du lese mer om Riemann-summer og numerisk integrasjon. Dette kommer de fleste av dere til å lære mer om på universitetet!

Løsningsforslag

1a)

$$\int x^2 - 5x + e^x \, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + e^x + C$$

1b) Vi bruker delvis integrasjon. La $u = x$, $v' = \cos x$. Da blir $u' = 1$, $v = \sin x$. Så vi får

$$\begin{aligned} \int x \cos x \, dx &= x \sin x - \int 1 \cdot \sin x \, dx \\ &= x \sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

1c) Substitusjon, la $u = x^2 - 9$. Da er $\frac{du}{dx} = 2x$. Da får vi

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2 - 9} \, dx &= \int \frac{x}{u} \frac{du}{2x} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} \\ &= \frac{1}{2} \ln |u| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln |x^2 - 9| + C \end{aligned}$$

(Ved å bruke konjugatsetningen og logaritmereglene er dette det samme som $\frac{1}{2} \ln |x - 3| + \frac{1}{2} \ln |x + 3| + C$)

1d) Substitusjon, la $u = e^x + 5$. Da er $\frac{du}{dx} = e^x$. Så vi får

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x}{e^x + 5} \, dx &= \int \frac{e^x}{u} \frac{du}{e^x} \\ &= \int \frac{du}{u} \\ &= \ln |u| + C \\ &= \ln |e^x + 5| + C \end{aligned}$$

1e) Substitusjon, la $u = \sin x$. Da er $\frac{du}{dx} = \cos x$. Så

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x \cdot \cos x \, dx &= \int u^3 \cdot \cos x \frac{du}{\cos x} \\ &= \int u^3 \, du \\ &= \frac{u^4}{4} + C \\ &= \frac{\sin^4 x}{4} + C\end{aligned}$$

2) En generell antiderivert for f er gitt ved

$$\begin{aligned}G(x) &= \int 6x^2 + 4x - 3 \, dx \\ &= 2x^3 + 2x^2 - 3x + C\end{aligned}$$

Så må vi finne C slik at $G(1) = 0$. Vi har at $G(1) = 2 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + C = 0$. Ved å løse denne likningen for C får vi $C = -1$. Så den antideriverte G til f som er slik at $G(1) = 0$ er gitt ved

$$G(x) = 2x^3 + 2x^2 - 3x - 1$$

3a)

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 -x^3 + 3x \, dx &= \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} \right]_{-1}^0 \\ &= 0 - \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{3}{2} \\ &= -\frac{5}{4}\end{aligned}$$

3b) Substitusjon, la $u = x^2 + x$. Da er $\frac{du}{dx} = 2x + 1$ og $u(0) = 0$, $u(1) = 2$. Så vi får

$$\begin{aligned}\int_0^1 (2x + 1)e^{x^2+x} dx &= \int_0^2 \frac{du}{dx} e^u dx \\ &= \int_0^2 e^u du \\ &= [e^u]_0^2 \\ &= e^2 - e^0 \\ &= e^2 - 1\end{aligned}$$

3c)

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2} e^{2x} dx &= \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_0^{\ln 2} \\ &= \frac{e^{2 \ln 2}}{2} - \frac{e^0}{2} \\ &= \frac{e^{\ln 4}}{2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{4}{2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

3d) Substitusjon, la $u = \sin x + 2$. Da er $\frac{du}{dx} = \cos x$ og $u(0) = 2$, $u(\frac{\pi}{2}) = 3$.

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(\sin x + 2)^2} dx &= \int_2^3 \frac{\frac{du}{dx}}{u^2} dx \\ &= \int_2^3 \frac{du}{u^2} \\ &= \left[-\frac{1}{u} \right]_2^3 \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

3e)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{x^2 + 4x + 4} dx &= \int_0^1 \sqrt{(x+2)^2} dx \\ &= \int_0^1 x + 2 dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} + 2 - 0 \\ &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

4) Her kan det være lurt å tegne opp de to grafene. Vi må finne x -koordinatene til skjæringspunktene mellom $f(x) = x^2$ og $g(x) = x + 2$. Dette finner vi ved å løse likningen $f(x) = g(x)$, altså $x^2 = x + 2 \implies x^2 - x - 2 = 0$. Dette kan faktorerises til $(x-2)(x+1) = 0$, som vil si at vi har skjæringspunkter når $x = 2$ og $x = -1$. I området mellom skjæringspunktene er $g(x) > f(x)$. For å finne arealet begrenset av grafene, integrerer vi dermed $g(x) - f(x)$ fra $x = -1$ til $x = 2$.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 x + 2 - x^2 dx &= \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 \\ &= \frac{4}{2} + 2 \cdot 2 - \frac{8}{3} - \left(\frac{1}{2} - 2 - \frac{-1}{3} \right) \\ &= 2 + 4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} \\ &= \frac{9}{2}\end{aligned}$$

Arealet begrenset av grafene til de to funksjonene $f(x) = x^2$ og $g(x) = x + 2$ er altså $\frac{9}{2}$.

5) Produktregelen for derivasjon er gitt ved

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$

Hvis vi nå integrerer begge sider får vi

$$\int (f \cdot g)' = \int (f'g + fg')$$

På venstresiden benytter vi nå at ved å integrere en derivert funksjon, så får vi bare funksjonen selv. På høyresiden benytter vi linearitet

$$f \cdot g = \int f'g + \int fg'$$

Ved å flytte over et av integralene, sitter vi igjen med uttrykket for delvis integrasjon, nemlig

$$\int f g' = f g - \int f' g$$

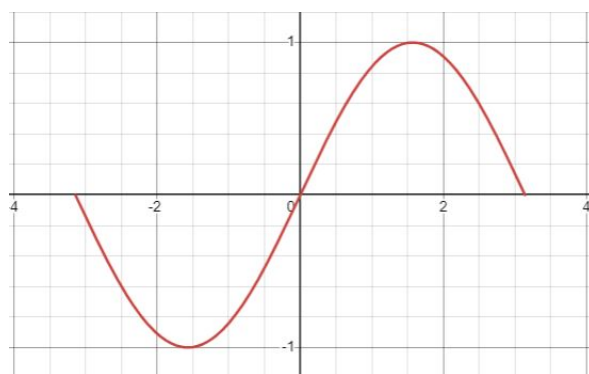
6a) Vi har at $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Ved å bruke brøk-regelen for derivasjon får vi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= 1 + \tan^2 x \end{aligned}$$

6b) Her kan vi bruke resultatet fra a-oppgaven, samt substitusjon. La $u = \tan x$, da er $\frac{du}{dx} = 1 + \tan^2 x$.

$$\begin{aligned} \int \frac{1 + \tan^2 x}{\tan x} dx &= \int \frac{\frac{du}{dx}}{u} dx \\ &= \int \frac{du}{u} \\ &= \ln u + C \\ &= \ln(\tan x) + C \end{aligned}$$

7a) Dette integralet kan vi løse ved å tegne grafen til $\sin x$ fra $x = -\pi$ til $x = \pi$.



Vi ser at arealet over x -aksen er lik arealet under x -aksen. Arealet under x -aksen er negativt, mens det over er positivt. Siden det negative arealet har lik absoluttverdi som det positive arealet, er summen av disse arealene 0, altså

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, dx = 0$$

7b) Dette arealet danner en rettvinklet trekant med høyde $h = 5$ og grunnlinje $g = 5$. Så bruker vi at arealet av en trekant er gitt ved $\frac{gh}{2}$. Arealet blir $\frac{gh}{2} = \frac{25}{2}$. Dermed er

$$\int_0^5 x \, dx = \frac{25}{2}$$

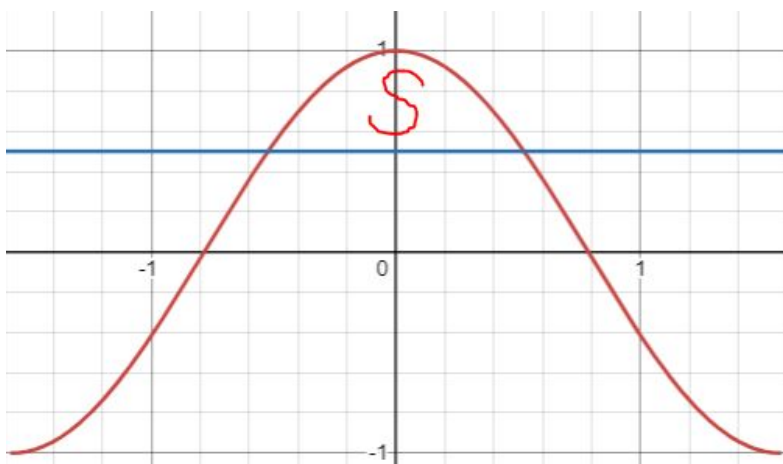
7c) Her kan vi tenke oss at vi integrerer den konstante funksjonen 1. Arealet vi er ute etter danner dermed et rektangel med høyde $h = 1$ og grunnlinje mellom e og π , altså $g = \pi - e$. Så

$$\int_e^\pi dx = \pi - e$$

8) Vi starter med å finne x -koordinatene til skjæringspunktene ved å løse $f(x) = g(x)$, altså $-x^2 + 8x - 7 = x^2 - 1 \implies 2x^2 - 8x + 6 = 0 \implies x^2 - 4x + 3 = 0 \implies (x - 3)(x - 1) = 0$. Skjæringspunktene er dermed i $x = 1$ og $x = 3$. Mellom skjæringspunktene er $f(x) > g(x)$, så vi integrerer funksjonen $f(x) - g(x)$ for å finne arealet av flaten

$$\begin{aligned} \int_1^3 -x^2 + 8x - 7 - x^2 + 1 \, dx &= \int_1^3 -2x^2 + 8x - 6 \, dx \\ &= \left[-\frac{2x^3}{3} + 4x^2 - 6x \right]_1^3 \\ &= -\frac{2 \cdot 3^3}{3} + 4 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 - \left(-\frac{2 \cdot 1}{3} + 4 \cdot 1 - 6 \cdot 1 \right) \\ &= -18 + 36 - 18 + \frac{2}{3} - 4 + 6 \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

9a)



9b) $\cos 2x$ skjærer linja $y = \frac{1}{2}$ når $\cos 2x = \frac{1}{2}$. Det skjer når $2x = \pm \frac{\pi}{3} \implies x = \pm \frac{\pi}{6}$. Arealet av S blir

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos(2x) - \frac{1}{2} dx &= \left[\frac{1}{2} \sin(2x) - \frac{x}{2} \right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2} \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{12} \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

9c) Volumet av omdreiningslegemet som dannes ved å rotere S rundt x -aksen finner vi ved å ta volumet av omdreiningslegemet som dannes ved å dreie $\cos 2x$ rundt x -aksen og så trekke fra volumet av omdreiningslegemet som dannes ved å rotere $y = \frac{1}{2}$ rundt x -aksen.

$$V = \pi \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 2x dx - \pi \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 dx$$

For å løse det første integralet er det flere måter å gå frem på, man kan for eksempel bruke at

$$\begin{aligned} \cos^2 x + \sin^2 x &= 1 \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ \implies \cos 2x &= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2 \cos^2 x - 1 \\ \implies \cos^2 x &= \frac{\cos 2x + 1}{2} \end{aligned}$$

Ved å bruke dette får vi

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 2x dx - \pi \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 dx \\ &= \pi \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos 4x + 1}{2} dx - \pi \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{4} dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{8} \sin 4x + \frac{x}{2} \right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} - \pi \left[\frac{x}{4} \right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \pi \left(\frac{1}{8} \sin \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{12} - \frac{1}{8} \sin \frac{-2\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \right) - \pi \left(\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{24} \right) \\ &= \frac{\pi}{4} \sin \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{12} \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi^2}{12} \end{aligned}$$

Volumet er altså $\frac{\sqrt{3}}{8}\pi + \frac{\pi^2}{12}$.